数理解析研究所講究録 第2122巻 2019年 56-75

Asymptotic property of ground states for a class of quasilinear Schrödinger equations with H^1-critical growth*

東京工業大学・理学院 柴田将敬 †
Masataka Shibata
Department of Mathematics,
Tokyo Institute of Technology

概要

準線形楕円型方程式 $-\Delta u-\kappa\Delta(|u|^{\alpha})|u|^{\alpha-2}u=|u|^{p-1}u-\lambda u$ in $\mathbb{R}^N$ を考える. この方程式の正値解について, 存在・非存在・一意性・$\kappa\to 0$ としたときの漸近挙動に関する既存の結果を紹介し, $p+1$ が Sobolev の臨界指数であるときの漸近挙動について述べる.

1 序

1.1 背景

$N\geq 1$ とし, $\alpha>1$, $p>1$, $\kappa>0$ をパラメータとする. そして, 準線形 Schrödinger 方程式

$$i\frac{\partial z}{\partial t}=-\Delta z-|z|^{p-1}z-\kappa\Delta(|z|^{\alpha})|z|^{\alpha-2}z\quad (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \tag{1}$$

を考える. ここで, $z=z(t,x)$ は複素数値の未知関数である. (1) はプラズマ物理に現れる準線形 Schrödinger 方程式である. 物理的な背景については, [BEPZ01, Kur81] を参照されたい.

* 足達慎二 氏（静岡大学）・渡辺達也 氏（京都産業大学）との共同研究に基づく.
本研究は科研費（課題番号：15K04970, 18K03356, 18K03362, 18K03383）の助成を受けたものである.

† email: shibata@math.titech.ac.jp

(1) の解で, $\lambda > 0$, $z(t,x) = e^{i\lambda t}u(x)$ と変数分離されているものに注目する. このような解は定在波解と呼ばれ, u は次の準線形楕円型方程式を満たす.

$$-\Delta u - \kappa\Delta(|u|^{\alpha})|u|^{\alpha-2}u = |u|^{p-1}u - \lambda u \text{ in } \mathbb{R}^N. \tag{2}$$

(2) の正値解について考察し, 特に $\kappa \to 0$ とした場合の漸近挙動についての結果を与えるのが本稿の目的である.

1.2 変分構造

エネルギー汎関数を

$$I_\kappa(u) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2(1+\alpha\kappa|u|^{2\alpha-2})\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^{p+1}}{p+1} - \frac{\lambda|u|^2}{2}\,dx \quad (u \in X),$$
$$X := \left\{u \in H^1(\mathbb{R}^N); \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2|u|^{2\alpha-2}\,dx < \infty\right\}$$

とおく. ここで, 準線形項に対応する項の影響で, I_κ は $H^1(\mathbb{R}^N)$ 上では定義されない. なので, I_κ が意味を持つように定義域を $X \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ に制限して考える. そして, (2) の弱解 u を,

$$u \in X, \quad I'_\kappa(u)\phi = 0 \text{ for } \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$$

を満たすものとして定義する. ここで, $I'_\kappa(u)\phi$ は I_κ の u における ϕ 方向微分 (Gâteaux 微分) であり,

$$I'_\kappa(u)\phi = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u\cdot\nabla\phi + \kappa\nabla(|u|^{\alpha})\cdot\nabla(|u|^{\alpha-2}u\phi) - |u|^{p-1}u\phi + \lambda u\phi\,dx$$

となっている. 楕円型方程式の解の正則性より, u は古典解になることもわかる.

$$m_\kappa := \inf\{I_\kappa(u); u \text{ は非自明な弱解}\},$$
$$\mathcal{G}_\kappa := \{u_\kappa; I_\kappa(u_\kappa) = m_\kappa, u \text{ は非自明な弱解}\}$$

とおく. ここで, m_κ は最小エネルギー, $\mathcal{G}_\kappa$ に属する u を ground state と呼ぶ. 各 $u \in \mathcal{G}_\kappa$ について, 最小エネルギー性より, ある $\theta \in \mathbb{R}$ が存在し, $e^{i\theta}u > 0$ となることが示せる (cf. [Caz03, Theorems 8.1.4–8.1.6]). もちろん $e^{i\theta}u$ もまた ground state である. 従って, ground state として (2) の正値解のみを考えれば良い. さらに, (2) の正値解は球対称で, 最大点を中心に減少していくこともわかる. 平行移動してもやはり解であるので, 原点中心に球対称としてよい. 以上より, 考える問題は次の常微分方程式に帰着される.

$$\begin{cases} -\Delta u - \kappa u^{\alpha-1}\Delta(u^{\alpha}) = u^p - \lambda u,\ u > 0 \text{ on } (0,\infty), \\ u(0) > 0, \quad u'(0) = 0, \quad \lim_{r\to\infty} u(r) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

ここで, $\Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{N-1}{r}\frac{d}{dr}$, $u(r) = u(x)\ \ (r = |x|)$ である. なお, 本稿では, $\mathbb{R}^N$ 上で定義された球対称関数 $u(x)$ と, $[0, \infty)$ 上で定義される $\tilde{u}(r) = u(x)\ (r = |x|)$ を同一視し, 同じ記号で表す.

1.3　正値解の存在・非存在

(2) や, (2) で λ の部分がポテンシャル関数 $V(x)$ となった場合の正値解の存在は, [PSW02, LW03, LWW03, CJ04, LWW04] などで議論されている. [CJ04, LWW04] で導入された変数変換を用いると, 考えている準線形楕円型方程式を半線形楕円型方程式に帰着することが出来, そこでの既存の結果を使って (3) の正値解の存在が分かる. その変数変換と正値解の存在については, 第 2 節で述べるが, 結論として, $1 < p < \alpha 2^* - 1$ の時に正値解が存在する. ここで

$$2^* = \begin{cases} \frac{2N}{N-2} & \text{if } N \geq 3, \\ \infty & \text{if } N = 1, 2 \end{cases}$$

は Sobolev の埋め込みの臨界指数である.

一方, (3) の正値解 u があったとすると, u は遠方で指数減衰することから, Pohozaev の等式

$$\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 (1 + \alpha\kappa |u|^{2\alpha-2})\, dx - N\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^{p+1}}{p+1} - \frac{\lambda |u|^2}{2}\, dx = 0 \tag{4}$$

を満たす. また, 方程式に解 u を掛けて積分すると,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 (1 + \alpha^2\kappa |u|^{2\alpha-2})\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} - \lambda |u|^2\, dx = 0 \tag{5}$$

である. 2 つの等式を用いると, $\alpha > 1$, $p > 1$, $u \not\equiv 0$ であるので,

$$\begin{aligned}
&\frac{N-2}{2N}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 (1 + \alpha\kappa |u|^{2\alpha-2})\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^{p+1}}{p+1} - \frac{\lambda |u|^2}{2}\, dx \\
&< \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^{p+1}}{p+1} - \frac{\lambda |u|^2}{p+1}\, dx = \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 (1 + \alpha^2\kappa |u|^{2\alpha-2})\, dx \\
&< \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 (\alpha + \alpha^2\kappa |u|^{2\alpha-2})\, dx = \frac{\alpha}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 (1 + \alpha^2\kappa |u|^{2\alpha-2})\, dx
\end{aligned}$$

を得る. 従って, 正値解の存在のためには, $\frac{N-2}{2N} < \frac{\alpha}{p+1}$ が必要である. これらの結果をまとめると, 正値解の存在・非存在については全てわかる.

命題 1.1. $\alpha > 1$, $\kappa > 0$, $\lambda > 0$ とする.

(i) $1 < p < \alpha 2^* - 1$ ならば, (3) は正値解を持つ.

(ii) $p \geq \alpha 2^* - 1$ ならば, (3) の正値解は存在しない.

$\kappa = 0$ の場合は, $1 < p < 2^* - 1$ が正値解の存在する範囲である. つまり, どんな小さい $\kappa > 0$ であっても, 準線形項の影響により, $2^* - 1 \leq p < \alpha 2^* - 1$ においても正値解が存在するというのが, この問題の特徴になっている. 以後, 正値解が存在する場合のみを考えるので, $1 < p < \alpha 2^* - 1$ を仮定する.

1.4 正値解の一意性

(3) の正値解が存在するとき, その一意性について調べるのは, 応用上も重要な課題である. 実際, $N = 1$, $\alpha = 2$ の場合には, [CJS10] によって一意性が得られている. なお, [CJS10] では解の安定性などについても議論されている.

$N \geq 2$ の場合は, 正値解の一意性を得るのはより難しい. しかし, (3) は変数変換によって半線形楕円型方程式に帰着されるので, 半線形楕円型方程式の正値解の一意性の結果を適用することができると期待される. 実際, 表のように, κ を十分大きくとれば正値解が一意であることが示されている.

また, $\kappa > 0$ が十分小さい場合には, $\kappa \to 0$ とした場合の正値解の漸近挙動を調べることができる. それによって, 極限問題の一意性から, κ が十分小さい場合の一意性が得られる. 実際, 表のように, 十分小さい κ に対して ground state となる正値解の一意性が得られている.

κ：十分大での正値解の一意性

論文	仮定
[GS12]	$N \geq 3$, $p \geq \alpha - 1$.
[AW12]	$N = 2$, $p \geq 2\alpha - 1$. $N \geq 3$, $p \geq \alpha - 1$.

κ：十分小での ground state の一意性

論文	仮定
[Sel11]	$N \geq 1$, $\alpha = 2$, $1 < p < 2^* - 1$.
[ASW14a]	$N \geq 3$, $1 < p < 2^* - 1$.
[ASW14b]	$N = 2$.
[AW16]	$N \geq 3$, $p > 2^* - 1$, $p \geq \alpha - 1$.

なお, 表において, $\alpha > 1$, $1 < p < \alpha 2^* - 1$ は常に仮定している.

その後の研究の進展により, 現在では一般の κ に対して, 正値解の一意性を示すことが出来ている.

命題 1.2 ([ASW17, ASW18])**.** $N \geq 2$, $\kappa > 0$, $\alpha > 1$, $1 < p < \alpha 2^* - 1$ とする. そのとき, (3) は一意正値解を持つ.

なお, 上記の結果では正値解における線形化作用素の非退化性も示されている. 証明の方針については, 第 2 節で述べる.

1.5 漸近挙動

一般に正値解が一意存在することがわかったので, (3) の正値解を u_κ とおく. u_κ の $\kappa \to 0$ での漸近挙動は, 既に κ が十分小さい場合の一意性を調べる際にかなり理解されているので, その部分について述べる.

方程式 (3) で単に $\kappa = 0$ とすると,

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p - \lambda u, \ u > 0 \ \text{ on } (0,\infty), \\ u(0) > 0, \quad u'(0) = 0, \quad \lim_{r\to\infty} u(r) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

を得る. 従って, u_κ の $\kappa \to 0$ とした極限 u_0 は (6) の解となることが期待される. しかし, (6) は $p \geq 2^* - 1$ では解を持たない（先ほどの議論と同様, Pohozaev の等式を用いて示せる）ので, p の値によって極限が異なることが予想される, 実際, 次が分かっている.

命題 1.3 ([ASW14a, ASW14b])**.** $N \geq 2$, $1 < p < 2^* - 1$ とする.

$$u_\kappa \to u_0 \text{ in } H^1(\mathbb{R}^N) \text{ as } \kappa \to 0$$

が成り立つ. ここで, u_0 は (6) の一意解である.

先に述べたように, $p > 2^* - 1$ では (6) は正値解を持たないので, 適当なスケーリングの元で, 異なる極限問題が現れると期待される. 実際, $\hat{u}_\kappa(x) = \kappa^{\frac{1}{2(\alpha-1)}} u_\kappa(\kappa^{\frac{p-1}{4(\alpha-1)}} x)$ と置くと, $\hat{u}_\kappa$ は方程式

$$\begin{cases} -\Delta \hat{u}_\kappa - \hat{u}_\kappa^{\alpha-1}\Delta(\hat{u}_\kappa^\alpha) = \hat{u}_\kappa^p - \lambda \kappa^{\frac{p-1}{2(\alpha-1)}} \hat{u}_\kappa, \ \hat{u}_\kappa > 0 \ \text{ on } (0,\infty), \\ \hat{u}_\kappa(0) > 0, \quad \hat{u}_\kappa'(0) = 0, \quad \lim_{r\to\infty} \hat{u}_\kappa(r) = 0 \end{cases}$$

を満たしている. ここで $\kappa = 0$ と置くと次の方程式を得る.

$$\begin{cases} -\Delta \hat{u}_0 - \hat{u}_0^{\alpha-1}\Delta(\hat{u}_0^\alpha) = \hat{u}_0^p, \ \hat{u}_0 > 0 \ \text{ on } (0,\infty), \\ \hat{u}_0(0) > 0, \quad \hat{u}_0'(0) = 0, \quad \lim_{r\to\infty} \hat{u}_0(r) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

命題 1.4 ([ASW14c])**.** $N \geq 3$, $2^* - 1 < p < \alpha 2^* - 1$ とする. このとき,

$$\hat{u}_\kappa \to \hat{u}_0 \text{ in } D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \cap C^2(\mathbb{R}^N) \text{ as } \kappa \to 0$$

が成立する. ここで, $\hat{u}_0$ は (7) の一意解, $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) = \overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^N)}^{\|\nabla \cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}}$ である.

以上を踏まえると, 「$p=2^*-1$ の場合の漸近挙動がどうなるのか？」というのは自然な問いかけである. なお, (7) は $p=2^*-1$ では正値解を持たないことが, やはり Pohozaev の等式を用いて示せるので, さらに異なる極限問題が現れると予想される.

1.6 主結果

主結果を述べるために, Talenti 関数

$$W(x) := \left(1+\frac{|x|^2}{N(N-2)}\right)^{-\frac{N-2}{2}}$$

を思い出しておく. W は方程式

$$\begin{cases} -\Delta W = W^{2^*-1}, \ W>0 \ \text{ in } \mathbb{R}^N, \\ W(0)=1, \quad \lim_{|x|\to\infty} W(x)=0 \end{cases}$$

の一意正値球対称解である. S を Sobolev の埋め込み定理

$$\|u\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \le S\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \text{ for } u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$$

の最良定数とすると, W は不等式の等号を実現している.

定理 1.5 ([Adachi-S-Watanabe, preprint ($N\ge 4$), in preparation ($N=3$)]). $N\ge 3$, $\alpha>1$, $\kappa>0$, $p=2^*-1$ とする. 方程式 (3) の一意に定まる正値解を u_κ とし, $\xi_\kappa := u_\kappa(0)$, $U_\kappa(x) := \xi_\kappa^{-1}u(\xi_\kappa^{-\frac{2}{N-2}}x)$ とおく. このとき,

$$\xi_\kappa\to\infty, \quad U_\kappa\to W \text{ in } D^{1,2}(\mathbb{R}^N)\cap C^2(\mathbb{R}^N) \text{ as } \kappa\to 0$$

が成立する. さらに, 次のように ξ_κ の漸近挙動がわかる.

$$\begin{aligned} \kappa\xi_\kappa^{2\alpha-2+\frac{4}{N-2}} &\to C_N^* \text{ if } N\ge 5, \\ \frac{\kappa\xi_\kappa^{2\alpha}}{\log\xi_\kappa} &\to C_4^* \text{ if } N=4, \\ \kappa\xi_\kappa^{2\alpha} &\to C_3^* \text{ if } N=3, \ \text{as } \kappa\to 0 \end{aligned}$$

ここで, $C_N^*>0$ は具体的に定まる定数である.

2 Dual approach

この方程式は, ある変換を用いることで, 半線形楕円型方程式に帰着できる. 正値解の存在や一意性を示す時には, この変換が本質的に利用される. また, この変換は変分

構造を保ち, 状況に応じて, 元の方程式と変換した方程式と都合の良い方を利用することができる. そういったことから, この変換による手法は dual approach と呼ばれる.

$f_\kappa(s)$ を次の常微分方程式の一意解とし, $\mathbb{R}$ 上で奇関数となるように拡張しておく.

$$f_\kappa'(s) = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha\kappa f_\kappa(s)^{2\alpha-2}}} \text{ on } (0,\infty),\ \ f_\kappa(0)=0.$$

このようにすると, $s>0$ が十分小さいときには $f_\kappa(s)\sim s$, $s>0$ が十分大きい時には $f_\kappa(s)\sim s^{1/\alpha}$ となっている.

方程式

$$-\Delta u - \kappa\Delta(|u|^\alpha)|u|^{\alpha-2}u = |u|^{p-1}u - \lambda u$$

の解 u に対して変換 $v = f_\kappa^{-1}(u)$ を考えると, v は半線形楕円型方程式

$$-\Delta v = g_\kappa(v) := (|f_\kappa(v)|^{p-1}f_\kappa(v) - \lambda f_\kappa(v))f_\kappa'(v)$$

の解となることがわかる. 逆も成り立つので, この変換で問題が半線形楕円型方程式に帰着されることがわかる. さらに, この変換 $v = f_\kappa^{-1}(u)$ で, $u\in X$ と $v\in H^1(\mathbb{R}^N)$ は一対一に対応し, 汎関数も

$$I_\kappa(u) = \hat{I}_\kappa(v) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v|^2\,dx - \int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{p+1}|f_\kappa|^{p+1} - \frac{\lambda}{2}|f_\kappa|^2\,dx$$

と対応することがわかる.

変換した半線形楕円型方程式に対して [BL83, BGK83] の結果を適用することで, 正値解の存在がわかる. 特に, 十分小さな s では $g_\kappa(s)\sim -\lambda s$, 十分大きな s では $g_\kappa(s)\sim s^{\frac{p+1}{\alpha}-1}$ となっていることから, $2<p+1<\alpha 2^*$ での正値解の存在が従う.

次に正値解の一意性について述べる. 簡単のために $\lambda=1$ とする. すると, 非線形項 g_κ は $g_\kappa<0$ on $(0,1)$, $g_\kappa>0$ on $(1,\infty)$ となっている. 変換をした結果, 半線形楕円型方程式の正値解の一意性に関する結果 [McL93, ST00] を用いることができるが, そのためには, $(1,\infty)$ 上で

$$K_g(s) = \frac{s g_\kappa'(s)}{g_\kappa(s)}$$

が単調減少となることを示す必要があり, この部分が難しい. しかし, κ が十分大きいときは, $f_\kappa(s)\sim s^{1/\alpha}$ となっていることが示せるので, これを用いて K_g の単調性を示すことができる. これが, [GS12] や [AW12] で κ が十分大きい場合に正値解の一意性が得られている理由である. 現在は, K_g の単調性を示す部分に技術的な進展があり, 一般の κ について正値解の一意性が得られている. 詳しくは [ASW17, ASW18] を参照されたい. なお, K_g が $(1,\infty)$ 上で単調となるためには, $p\geq\alpha-1$ という条件が必

要であり, [ST00] を用いるだけでは, $p < \alpha - 1$ となる場合は扱えない. さらに, 正値解における線形化作用素の非退化性に関する結果を得るためには, [McL93] の結果を用いれば良いが, そのためには $\lim_{s\to\infty} K_g(s) \geq 1$ となる必要がある. この条件は $p \geq 2\alpha - 1$ を意味する. これらの条件をはずすためには, [ST00, McL93] を改良する必要があり, その改良は [ASW18] で実現されている.

3　定理 1.5 の証明：U_κ の漸近挙動

本節では, U_κ が W に収束することを示す. 定理の仮定より, $N \geq 3$, $p = 2^* - 1$ である. また, 簡単のため, 以下では $\lambda = 1$ とする. 解の漸近挙動を調べることは, 解のエネルギーの漸近挙動を調べることに対応しており, 定理 1.5 の証明の際には, エネルギー漸近展開の第一項を調べることによって, u_κ を正規化した U_κ が Talenti 関数に漸近することを得る. そして, $u_\kappa(0) = \|u_\kappa\|_{L^\infty}$ の詳しい漸近挙動を調べることが, エネルギー漸近展開の第二項を調べることに対応している. 本節では, エネルギー漸近展開の第一項を調べていく.

3.1　エネルギーの特徴づけ

u_κ は (3) の一意解であるが, それは ground state でもあるので, $I_\kappa(u_\kappa) = m_\kappa$ である. ground state のエネルギー m_κ については様々な特徴づけが出来るが, ここでは, Pohozaev の等式を用いた特徴づけを用いる. Pohozaev の等式 (4) は, 変分構造の観点からは次のように解釈できる.

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} I_\kappa(u(\cdot/t)) \bigg|_{t=1} \\
&= \frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 (1 + \alpha\kappa |u|^{2\alpha-2})\, dx - N \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^{p+1}}{p+1} - \frac{\lambda |u|^2}{2}\, dx = 0
\end{aligned}$$

そして, m_κ は, Pohozaev の等式を満たすもの全体の上での I_κ の最小値としても特徴づけられる (cf. [ASW14a, Proposition 2.4]). つまり,

$$m_\kappa = \inf \left\{ I_\kappa(u); u \in X \setminus \{0\},\ \frac{d}{dt} I_\kappa(u(\cdot/t)) \bigg|_{t=1} = 0 \right\}$$

となっている. $u \in X \setminus \{0\}$ に対して, $t \mapsto I_\kappa(u(\cdot/t))$ は $t > 0$ で単調増加か, $t > 0$ で唯一の最大点を持つことが, $I_\kappa(u(\cdot/t))$ を計算すればわかる. その最大点 t_u において,

$u(\cdot/t_u)$ は Pohozaev の等式を満たすので,

$$m_\kappa = \inf_{\substack{u\in X\\ u\neq 0}} J_\kappa(u), \quad J_\kappa(u) := \sup_{t>0} I_\kappa(u(\cdot/t))$$

を得る. 最大値を計算すると,

$$J_\kappa(u) = \frac{1}{N}\frac{\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\,dx + \alpha\kappa\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2\alpha-2}|\nabla u|^2\,dx\right)^{\frac{N}{2}}}{\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}\,dx - \int_{\mathbb{R}^N}\frac{2^*}{2}|u|^2\,dx\right)_+^{\frac{N-2}{2}}}$$

となることがわかる. ここで, $1/(0)_+ = \infty$ とし, $\kappa = 0$ としたものを $J_0(u)$ とおく. 本稿では, この特徴づけを用いてエネルギーの値を詳しく評価する. さらに, 比較のために次のような量を導入する.

$$m_0 := \inf_{\substack{u\in H^1(\mathbb{R}^N)\\ u\neq 0}} \frac{1}{N}\frac{\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\,dx\right)^{\frac{N}{2}}}{\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}\,dx - \int_{\mathbb{R}^N}\frac{2^*}{2}|u|^2\,dx\right)_+^{\frac{N-2}{2}}} = \inf_{\substack{u\in H^1(\mathbb{R}^N)\\ u\neq 0}} J_0(u),$$

$$\hat{m} := \inf_{\substack{u\in H^1(\mathbb{R}^N)\\ u\neq 0}} \frac{1}{N}\frac{\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\,dx\right)^{\frac{N}{2}}}{\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}\,dx\right)^{\frac{N-2}{2}}} = \frac{1}{NS^N}.$$

ここで, $\hat{m}$ は Sobolev の埋め込みに関する Rayleigh 商であるので, その値は Sobolev の埋め込みの最良定数 S を用いて表すことが出来ることを注意しておく. 右辺の汎関数の大小関係と, $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ が X や $H^1(\mathbb{R}^N)$ で稠密であることを用いれば,

$$\hat{m} \leq m_0 \leq m_\kappa \text{ for } \kappa > 0 \tag{8}$$

が成り立つことはすぐにわかる.

3.2 テスト関数とエネルギーの評価

Talenti 関数 W をカットオフすることで, テスト関数 $\hat{W}_r$ を作る. $r > 1$ として,

$$\hat{W}_r(x) := W(x)\chi_r(|x|), \quad \chi_r(s) = \begin{cases} 1 & \text{if } s \leq 1, \\ 1 - \frac{s-1}{r-1} & \text{if } 1 < s \leq r, \\ 0 & \text{if } s > r. \end{cases}$$

とおく. 直接計算することにより, 次の評価を得ることが出来る.

補題 3.1. r に依らない定数 $C>0$ が存在して, $r>1$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \hat{W}_r|^2\,dx \le \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla W|^2\,dx + C\left(\frac{1}{r}\right)^{N-2},$$
$$\int_{\mathbb{R}^N} |\hat{W}_r|^{2^*}\,dx \ge \int_{\mathbb{R}^N} |W|^{2^*}\,dx - C\left(\frac{1}{r}\right)^{N},$$
$$\int_{\mathbb{R}^N} |\hat{W}_r|^{2\alpha-2}|\nabla \hat{W}_r|^2\,dx \le \int_{\mathbb{R}^N} |W|^{2\alpha-2}|\nabla W|^2\,dx + C\left(\frac{1}{r}\right)^{(2\alpha-1)(N-2)},$$
$$\int_{\mathbb{R}^N} |\hat{W}_r|^2\,dx \le a(r) := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^N} W^2\,dx & \text{if } N\ge 5,\\ |\partial B(0,1)|\,(64\log r + C) & \text{if } N=4,\\ 6|\partial B(0,1)|r & \text{if } N=3 \end{cases}$$

が成り立つ.

テスト関数 $\hat{W}_r$ を用いることにより, 次がわかる.

補題 3.2. $m_0=\hat{m}$, $\lim_{\kappa\to 0} m_\kappa = \hat{m}$ が成り立つ.

証明. (8) と定義より, $r>1$, $t>0$ に対して,

$$\hat{m} \le m_0 \le m_\kappa \le J_\kappa(t\hat{W}_r)$$

が成立する. $\kappa\to 0$ とすると,

$$\hat{m} \le m_0 \le \liminf_{\kappa\to 0} m_\kappa \le \limsup_{\kappa\to 0} m_\kappa \le \limsup_{\kappa\to 0} J_\kappa(t\hat{W}_r) = J_0(t\hat{W}_r)$$

が任意の $t>0$, $r>1$ で成立する. $t\to\infty$ とすると,

$$\hat{m} \le m_0 \le \liminf_{\kappa\to 0} m_\kappa \le \limsup_{\kappa\to 0} m_\kappa \le \frac{1}{N}\frac{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \hat{W}_r|^2\,dx\right)^{\frac{N}{2}}}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\hat{W}_r|^{2^*}\,dx\right)^{\frac{N-2}{2}}}$$

を得, さらに $r\to\infty$ とすると, Talenti 関数 W が $\hat{m}$ を実現する minimizer になっていることから, 補題 3.1 より

$$\hat{m} \le m_0 \le \liminf_{\kappa\to 0} m_\kappa \le \limsup_{\kappa\to 0} m_\kappa \le \hat{m}$$

を得る. これは結論を意味する. □

3.3 $\kappa \to 0$ での解の有界性

正値解は ground state であるから, $I_\kappa(u_\kappa) = m_\kappa$ である. また, Pohozaev の等式 (4) を満たす. 従って,

$$\frac{1}{N}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2(1+\alpha\kappa|u|^{2\alpha-2})\,dx = m_\kappa = \hat{m} + o(1) \text{ as } \kappa \to 0 \tag{9}$$

となっており, $\kappa \to 0$ のときに $\|\nabla u_\kappa\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ が有界となることがわかる. U_κ の定義と直接計算により

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U_\kappa|^2\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\kappa|^2\,dx$$

となっているので, (U_κ) が $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ で有界であることも従う. また, (4) と (5) より,

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\int_{\mathbb{R}^N} \lambda|u|^2\,dx\\ &= \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2(1+\alpha\kappa|u|^{2\alpha-2})\,dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2(1+\alpha^2\kappa|u|^{2\alpha-2})\,dx\end{aligned}$$

となるが, (9) より右辺は有界であることがわかる. 従って, (u_κ) が $H^1(\mathbb{R}^N)$ で有界となる. 以上をまとめると次のようになる.

補題 3.3. $\kappa \to 0$ のとき, (u_κ) は $H^1(\mathbb{R}^N)$ で有界, (U_κ) は $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ で有界である.

3.4 $\xi_\kappa = u_\kappa(0)$ の漸近挙動

本節では, 補題 3.2 で求まった m_κ の評価を用いて, $\xi_\kappa := u_\kappa(0)$ の漸近挙動について調べる. まず, u_κ は原点で最大となるので, $\nabla u_\kappa(0) = 0$, $\Delta u_\kappa(0) \le 0$ である. 方程式より, $u_\kappa^p(0) - u_\kappa(0) \ge 0$, つまり, $\xi_\kappa = u_\kappa(0) \ge 1$ が成立していることに注意する.

補題 3.4. $\lim_{\kappa\to 0} \xi_\kappa = \infty$.

証明. 背理法で示す. ある定数 $C > 0$ とある部分列について（本稿では部分列もつねに κ で表す. ）,

$$u_\kappa(0) \to C < \infty \text{ as } \kappa \to 0$$

となっていると仮定する.

補題 3.3 より (u_κ) は $H^1(\mathbb{R}^N)$ で有界であり, さらに, u_κ は球対称である. 標準的な議論と楕円型正則性より, ある球対称な $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ が存在し,

$$u_\kappa \to u_0 \text{ in } H^1(\mathbb{R}^N) \cap C^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N) \tag{10}$$

を得る. $u_\kappa(0)\ge 1$ であったので, $u_0(0)\ge 1$ であり, $u_0\not\equiv 0$ がわかる. さて, 汎関数の大小関係から,

$$m_0 \le J_0(u_\kappa) \le J_\kappa(u_\kappa) = m_\kappa$$

であり, 極限をとると, 補題 3.2 と (10) より,

$$\hat{m} = \lim_{\kappa\to 0} J_0(u_\kappa) = J_0(u_0)$$

となっている. ここで, $u_0\not\equiv 0$ なので,

$$J_0(u_0) = \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^2\,dx\right)^{\frac{N}{2}}}{N\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^{2^*}\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{2^*}{2}|u_0|^2\,dx\right)_+^{\frac{N-2}{2}}} > \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^2\,dx\right)^{\frac{N}{2}}}{N\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^{2^*}\,dx\right)^{\frac{N-2}{2}}} \ge \hat{m}$$

を得る. 結局 $\hat{m} > \hat{m}$ となり, これは矛盾である. □

さて, U_κ は次の方程式を満たす.

$$\begin{cases} -\Delta U_\kappa - \kappa\xi_\kappa^{2\alpha-2}U_\kappa^{\alpha-1}\Delta(U_\kappa^\alpha) = U_\kappa^{2^*-1} - \xi_\kappa^{\frac{-4}{N-2}}U_\kappa,\ U_\kappa > 0 \ \text{ on } (0,\infty), \\ \|U_\kappa\|_\infty = U_\kappa(0) = 1, \quad U_\kappa'(0) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

補題 3.3 により (U_κ) は $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ で有界であり, 楕円型正則性により, U_κ は任意の $R>0$ に対して $C^{2,\alpha}(B_R)$ で有界となることがわかる. 従って, 部分列をとれば,

$$U_\kappa \to U_0 \text{ in } D^{1,2}(\mathbb{R}^N)\cap C^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N) \text{ as } \kappa\to 0$$

が成立するような $U_0\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)\cap C^2(\mathbb{R}^N)$ が存在する. さらに U_0 は球対称で原点で最大値をとり, $U_0(0)=1$ もわかる.

補題 3.5. $\kappa\to 0$ のとき, $\kappa\xi_\kappa^{2\alpha-2}$ は有界である.

証明. 背理法で示す. $\kappa\xi_\kappa^{2\alpha-2}\to\infty$ となる部分列が存在すると仮定する. 補題 3.4 と (11) より

$$-\frac{1}{\kappa\xi_\kappa^{2\alpha-2}}\Delta U_\kappa - U_\kappa^{\alpha-1}\Delta(U_\kappa^\alpha) = \frac{1}{\kappa\xi_\kappa^{2\alpha-2}}(U_\kappa^{2^*-1} + o(1)) \text{ in } \mathbb{R}^N$$

となるが, ここで $\kappa\to 0$ とすることで, $U_0\in C^2(\mathbb{R}^N)$ は方程式

$$-U_0^{\alpha-1}\Delta(U_0^\alpha) = 0 \text{ in } \mathbb{R}^N$$

を満たすことがわかる. $U_0(0)=1$ で U_0 は球対称であったので, U_0 は定数となることが分かる. それは $U_0\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ に矛盾する. □

補題 3.6. $\lim_{\kappa\to 0}\kappa\xi_\kappa^{2\alpha-2}=0$ である.

証明. 背理法で示す. 主張が成立しないと仮定すると, 補題 3.5 より, ある $C\in(0,\infty)$ が存在し, ある部分列について $\lim_{\kappa\to 0}\kappa\xi_\kappa^{2\alpha-2}=C$ となっている. (11) で $\kappa\to 0$ とすると, U_0 は方程式

$$-\Delta U_0 - CU_0^{\alpha-1}\Delta(U_0^\alpha)=U_0^{2^*-1} \text{ in } \mathbb{R}^N$$

の解となっていることが分かる. U_0 を掛けて積分すると,

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla U_0|^2(1+\alpha^2 CU_0^{2\alpha-2})\,dx=\int_{\mathbb{R}^N}U_0^{2^*}\,dx$$

を得る. 一方, Pohozaev の等式より,

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla U_0|^2(1+\alpha CU_0^{2\alpha-2})\,dx=\int_{\mathbb{R}^N}U_0^{2^*}\,dx$$

を得る. 差をとると,

$$\alpha(\alpha-1)C\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla U_0|^2U_0^{2\alpha-2}\,dx=0$$

となるが, これは $U_0\not\equiv 0$ に矛盾する. □

3.5 U_κ の漸近挙動

ここまでの議論で, エネルギーの漸近評価を用いて, ξ_κ の漸近挙動について調べた. その結果を用いると, U_κ が W に収束することが分かる.

補題 3.7.

$$U_\kappa\to W \text{ in } D^{1,2}(\mathbb{R}^N)\cap C^2(\mathbb{R}^N) \text{ as } \kappa\to 0$$

が成立する.

証明. 補題 3.6 より, (11) で $\kappa\to 0$ とすると, 極限関数 U_0 は方程式

$$-\Delta U_0=U_0^{2^*-1} \text{ in } \mathbb{R}^N$$

の解となることがわかる. さらに, $U_0\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ は球対称で $U_0(0)=1$ である. ここで, 常微分方程式の解の一意性を用いると $U_0\equiv W$ であることがわかる. ここまでの議論では κ について部分列をとっていたが, 極限関数が $U_0=W$ と一意に定まるので, 部分列を取らずに収束することもわかる. 楕円型正則性より $C^2(\mathbb{R}^N)$ で収束することもわかる. □

4　定理 1.5 の証明：ξ_κ の詳しい漸近挙動

ξ_κ について, より詳しい漸近挙動を得るためには, エネルギー漸近展開の第二項について調べる必要がある. 本節ではその点について議論する. 本稿では, $N \geq 5$ の場合の証明を与え, $N = 3, 4$ の場合については, 最後に簡潔に述べる. 以下, 特に述べない限り, $N \geq 5$ を仮定する.

4.1　エネルギーの上からの詳細な評価

得たいのはエネルギー漸近展開の第二項であるが, そのためには, 第二項と第三項を調べる必要がある. 実は第二項と第三項がバランスし, それがまとまることによって第二項が決定される. そのため, 次のような形の上からの評価をしておく.

補題 4.1. $M > 0$ を固定すると, 次が成立する.

$$m_\kappa \leq \hat{m}\left(1 + \frac{NB}{2A}\kappa(M\xi_\kappa)^{2\alpha-2}(1+o(1)) + \frac{ND}{2A}(M\xi_\kappa)^{\frac{-4}{N-2}}(1+o(1))\right) \text{ as } \kappa \to 0.$$

証明. テスト関数として $M\xi_\kappa \hat{W}_{M\xi_\kappa}$ を用いると,

$$m_\kappa \leq J_\kappa(M\xi_\kappa \hat{W}_{M\xi_\kappa})$$

を得る. あとは, 補題 3.1 を用いて右辺を評価すれば良い. □

4.2　エネルギーの下からの詳細な評価

エネルギーの下からのより詳細な評価については, U_κ が W に収束することから得られる. そのために, U_κ の積分量を評価しておく.

補題 4.2. 次が成立する.

$$\begin{gathered}
\lim_{\kappa\to 0}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U_\kappa|^2\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla W|^2\,dx =: A,\\
\lim_{\kappa\to 0}\int_{\mathbb{R}^N} U_\kappa^{2^*}\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} W^{2^*}\,dx = A,\\
\liminf_{\kappa\to 0}\int_{\mathbb{R}^N} U_\kappa^{2}\,dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} W^{2}\,dx =: D,\\
\liminf_{\kappa\to 0}\alpha\int_{\mathbb{R}^N} U_\kappa^{2\alpha-2}|\nabla U_\kappa|^2\,dx \geq \alpha\int_{\mathbb{R}^N} W^{2\alpha-2}|\nabla W|^2\,dx =: B.
\end{gathered}$$

証明. U_κ が W に $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)\cap C^2(\mathbb{R}^N)$ で収束することと, Fatou の補題を用いれば良い. $\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla W|^2\,dx=\int_{\mathbb{R}^N}W^{2^*}\,dx$ となることは, W の満たす方程式からわかる. □

注意 4.1. $N=3,4$ では $D=\infty$ となっている. エネルギーに L^2 ノルムに関する項があるので, このことが $N=3,4$ の場合のエネルギー評価を難しくし, ξ_κ の漸近挙動が $N=3$, $N=4$, $N\geq 5$ で異なる要因になっている.

補題 4.3.

$$m_\kappa \geq \hat{m}\left(1+\frac{NB}{2A}\kappa\xi_\kappa^{2\alpha-2}(1+o(1))+\frac{ND}{2A}\xi_\kappa^{\frac{-4}{N-2}}(1+o(1))\right)\ \text{as}\ \kappa\to 0$$

が成立する.

証明. U_κ の定義と補題 4.2 を用いると,

$$\begin{aligned}
m_\kappa = J_\kappa(u_\kappa) &= \frac{1}{N}\frac{\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla U_\kappa|^2\,dx+\alpha\kappa\xi_\kappa^{2\alpha-2}\int_{\mathbb{R}^N}U_\kappa^{2\alpha-2}|\nabla U_\kappa|^2\,dx\right)^{\frac{N}{2}}}{\left(\int_{\mathbb{R}^N}U_\kappa^{2^*}-\frac{N}{N-2}\xi_\kappa^{-\frac{4}{N-2}}U_\kappa^2\,dx\right)^{\frac{N-2}{2}}}\\
&= \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla U_\kappa|^2\,dx\right)^{\frac{N}{2}}\left(1+\frac{\kappa\xi_\kappa^{2\alpha-2}\alpha\int_{\mathbb{R}^N}U_\kappa^{2\alpha-2}|\nabla U_\kappa|^2\,dx}{\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla U_\kappa|^2\,dx}\right)^{\frac{N}{2}}}{N\left(\int_{\mathbb{R}^N}U_\kappa^{2^*}\,dx\right)^{\frac{N-2}{2}}\left(1-\frac{\frac{N}{N-2}\xi_\kappa^{-\frac{4}{N-2}}\int_{\mathbb{R}^N}U_\kappa^2\,dx}{\int_{\mathbb{R}^N}U_\kappa^{2^*}\,dx}\right)^{\frac{N-2}{2}}}\\
&\geq \hat{m}\frac{\left(1+\frac{\kappa\xi_\kappa^{2\alpha-2}B}{A}(1+o(1))\right)^{\frac{N}{2}}}{\left(1-\frac{N\xi_\kappa^{-\frac{4}{N-2}}D}{(N-2)A}(1+o(1))\right)^{\frac{N-2}{2}}}
\end{aligned}$$

を得る. ここで, 最後の部分では $\hat{m}$ の定義を用いた. 補題 3.4 と補題 3.6 より, Taylor 展開を用いて右辺を計算すれば, 結論が得られる. □

4.3 ξ_κ の漸近挙動

エネルギーの上下からの詳細な評価が得られたので, それらを用いることで ξ_κ の漸近挙動を調べることが出来る.

補題 4.4. $\kappa\to 0$ のとき, $\xi_\kappa^{2\alpha-2+\frac{4}{N-2}}$ は上下に有界である. つまり,

$$0<\liminf_{\kappa\to 0}\kappa\xi_\kappa^{2\alpha-2+\frac{4}{N-2}}\leq\limsup_{\kappa\to 0}\kappa\xi_\kappa^{2\alpha-2+\frac{4}{N-2}}<\infty$$

が成立する. 特に, $\beta := 2\alpha - 2 + \frac{4}{N-2}$ に対して $\xi_\kappa \sim \kappa^{-1/\beta}$ が成り立つ.

証明. 補題 4.1 と補題 4.3 の結果より, $\hat{m} - m_\kappa$ が上下から評価できる. $M > 0$ を固定し, これを整理すると,

$$\begin{aligned} &B\kappa\xi_\kappa^{2\alpha-2+\frac{4}{N-2}}(1+o(1)) + D(1+o(1)) \\ &\le BM^{2\alpha-2}\kappa\xi_\kappa^{2\alpha-2+\frac{4}{N-2}}(1+o(1)) + DM^{\frac{-4}{N-2}}(1+o(1)) \text{ as } \kappa \to 0 \end{aligned} \tag{12}$$

を得る. $\kappa\xi_\kappa^{2\alpha-2+\frac{4}{N-2}} \to 0$ となる部分列が存在すると仮定すると, (12) で $\kappa \to 0$ として

$$D \le DM^{\frac{-4}{N-2}}$$

を得る. ここで, $M > 0$ は任意であったので, 十分大きな M に対して矛盾する. 従って, $\kappa\xi_\kappa^{2\alpha-2+\frac{4}{N-2}}$ は下に有界である.

次に, $\kappa\xi_\kappa^{2\alpha-2+\frac{4}{N-2}} \to \infty$ となる部分列が存在すると仮定する. (12) を $\kappa\xi_\kappa^{2\alpha-2+\frac{4}{N-2}}$ で割って $\kappa \to 0$ とすると,

$$B \le BM^{2\alpha-2}$$

を得る. M は任意であったので, 十分小さな M に対して矛盾する. 結局 $\kappa\xi_\kappa^{2\alpha-2+\frac{4}{N-2}}$ は有界となり, 結論が従う. □

実は, ここまでの議論ではエネルギー漸近展開で, 第二項, 第三項の係数の情報は用いていない. 最後に, 第二項, 第三項の係数が一致していることを用いて, $\kappa\xi_\kappa^{2\alpha-2+\frac{4}{N-2}}$ の極限値が定まることを確かめる.

補題 4.5. $\lim_{\kappa\to 0}\kappa\xi_\kappa^{2\alpha-2+\frac{4}{N-2}} = C_N^*$ が成立する. ここで $C_N^* = \frac{2D}{(\alpha-1)(N-2)B}$ である.

証明. 補題 4.4 より, 部分列をとれば, ある $\delta \in (0,\infty)$ が存在して $\xi_\kappa^{2\alpha-2+\frac{4}{N-2}} \to \delta$ が成り立つ. この δ が一意に定まることを示せば良い. $M > 0$ を固定し, (12) で $\kappa \to 0$ とすると,

$$B\delta + D \le BM^{2\alpha-2}\delta + DM^{\frac{-4}{N-2}}$$

が成立する. ここで, M は任意であったので, $h(M) := BM^{2\alpha-2}\delta + DM^{\frac{-4}{N-2}}$ とおくと,

$$h(1) \le h(M) \text{ for } M > 0$$

が成立することがわかる．これは h が $M=1$ で最小値をとることを意味しているので, $h'(1)=0$ である．つまり,

$$h'(1)=2(\alpha-1)B\left(\delta-\frac{2D}{(\alpha-1)(N-2)B}\right)=0$$

である．このことから,

$$\delta=C_N^*:=\frac{2D}{(\alpha-1)(N-2)B}$$

となることがわかる．極限の一意性から部分列を取らずに良いことがわかり, 結論が得られる． □

以上で, $N\geq 5$ の場合に定理 1.5 が証明された．なお, 補題 4.1 で $M=1$ とし, 補題 4.3, 補題 4.5 をあわせると, 最終的なエネルギー漸近展開

$$m_\kappa=\hat{m}\left(1+\frac{NB}{2A}\left(1+\frac{(\alpha-1)(N-2)}{2}\right)\kappa\xi_\kappa^{2\alpha-2}+o\left(\kappa\xi_\kappa^{2\alpha-2}\right)\right)\ \text{as}\ \kappa\to 0$$

もわかる．

4.4　$N=4$ の場合

先に述べたように, $N=3,4$ の場合, $\int_{\mathbb{R}^N}W^2\,dx=\infty$ であるから, エネルギー汎関数に含まれる項 $\int_{\mathbb{R}^N}U_\kappa^2\,dx$ の評価をするときに, より詳しい解析が必要となる．ここでは, $N=4$ の場合の議論の方針を紹介する．上からの評価については, 補題 4.1 と同様に, テスト関数として $M\xi_\kappa\hat{W}_{M\xi_\kappa}$ を用い, 補題 3.1 の結果を使って評価することにより, $\kappa\to 0$ のとき

$$m_\kappa\leq\hat{m}\left(1+\frac{NB}{2A}\kappa(M\xi_\kappa)^{2\alpha-2}(1+o(1))+\frac{ND}{2A}(M\xi_\kappa)^{-2}(\log M\xi_\kappa)(1+o(1))\right)$$

といった評価を得る．ここで, $D=64|\partial B(0,1)|$ である．一方, 下からの評価を得るためには, 次を示すことが本質的となる．

$$\liminf_{\kappa\to 0}\frac{1}{\log\xi_\kappa}\int_{\mathbb{R}^N}U_\kappa^2\,dx\geq D.$$

ここで, 実は, 左辺の積分量の一番主要な部分は, U_κ の遠方での挙動になっている．U_κ の値を下から評価したいので, U_κ より小さな比較できる関数を探す．U_κ の満たす方程式より,

$$-\Delta U_\kappa=\frac{\alpha(\alpha-1)\kappa\xi_\kappa^{2\alpha-2}U_\kappa^{2^*-1}-\xi_\kappa^{-2}U_\kappa}{1+\alpha\kappa\xi_\kappa^{2\alpha-2}U_\kappa^{2\alpha-2}}\geq-\xi_\kappa^{-2}U_\kappa\ \text{in}\ \mathbb{R}^N$$

が成立する．このことは, U_κ が方程式

$$-\Delta u + \xi_\kappa^{-2} U_\kappa = 0 \text{ in } \mathbb{R}^N \tag{13}$$

の優解となっていることを意味する．一方で, (13) は $V_\kappa(r) = r^{-4} e^{-\xi_\kappa^{-1} r}$ という解を持つ．比較定理を用いると,

$$\frac{U_\kappa(r)}{U_\kappa(R)} \geq \frac{V_\kappa(r)}{V_\kappa(R)} \text{ for } r \geq R \tag{14}$$

が成立することが分かり, (14) と V_κ を用いることで, 目的の評価を得る．あとは, $N \geq 5$ の場合と同様にして, エネルギーの下からの評価

$$m_\kappa \geq \hat{m} \left(1 + \frac{NB}{2A} \kappa (\xi_\kappa)^{2\alpha-2} (1 + o(1)) + \frac{ND}{2A} (\xi_\kappa)^{-2} (\log \xi_\kappa)(1 + o(1)) \right) \text{ as } \kappa \to 0$$

を得ることが出来, 補題 4.4 や補題 4.5 と同様の議論を行うことで, 結論が従う．

4.5　$N = 3$ の場合

$N = 3$ の場合, $N = 4$ と同様の評価を用いることにより,

$$\begin{aligned} &\hat{m} \left(1 + C_1 \kappa (\xi_\kappa)^{2\alpha-2}(1 + o(1)) + C_2 (\xi_\kappa)^{-2}(1 + o(1))\right) \leq m_\kappa \\ &\leq \hat{m} \left(1 + C_3 (M\xi_\kappa)^{2\alpha-2}(1 + o(1)) + C_4 (M\xi_\kappa)^{-2}(1 + o(1))\right) \text{ as } \kappa \to 0 \end{aligned}$$

といった具合の評価を得ることが出来る．このエネルギー評価を用いることで, 補題 4.4 の証明の議論を行うことが出来, 結果として,

$$0 < \liminf_{\kappa \to 0} \kappa \xi_\kappa^{2\alpha} \leq \limsup_{\kappa \to 0} \kappa \xi_\kappa^{2\alpha} < \infty$$

までは分かる．しかし, $C_1 < C_3$, $C_2 < C_4$ などとなってしまっており, $\kappa \xi_\kappa^{2\alpha}$ の極限値を決定する議論（補題 4.5 の証明）が行えない．この問題点を解決するためには, エネルギーの評価をさらに工夫する必要がある．

エネルギーの上からの評価をさらに精密にするためには, より良い試験関数が必要で, そのためには,

$$\tilde{W}_{b,r}(x) = \begin{cases} W(x) & \text{if } |x| \leq R, \\ W(R)(R/|x|) e^{-b(|x|-R)} & \text{if } |x| > R, \end{cases}$$

といった関数が有用になる． これは, $|x| < R$ では Talenti 関数, $|x| > R$ では $-\Delta u + b^2 u = 0$ を満たす関数としてつなげたもので, R と b を上手く選ぶことにより,

より精密なエネルギー評価が得られる．また, エネルギーの下からの評価でも工夫が必要である．その原因は, 補題 4.3 の証明で,

$$\frac{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U_\kappa|^2 \, dx\right)^{\frac{N}{2}}}{N\left(\int_{\mathbb{R}^N} U_\kappa^{2^*} \, dx\right)^{\frac{N-2}{2}}} \geq \hat{m}$$

としていた部分にあり, これが, $N = 3$ では評価損につながっている．つまり, この部分をより精密にする必要がある．$N = 3$ の場合に必要な評価は,

$$\frac{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U_\kappa|^2 \, dx\right)^{\frac{N}{2}}}{N\left(\int_{\mathbb{R}^N} U_\kappa^{2^*} \, dx\right)^{\frac{N-2}{2}}} \geq \hat{m}\left(1 + \frac{9|\partial B|}{4A}\xi_\kappa^{-2} + o(\xi_\kappa^{-2})\right)$$

といったものになるが, この評価を得るためには, U_κ の下からの評価も必要になる．$N = 4$ の場合と同様, U_κ は

$$-\Delta U_\kappa + \xi_\kappa^{-4} U_\kappa \geq 0 \text{ in } \mathbb{R}^N$$

を満たし, 方程式

$$-\Delta u + \xi_\kappa^{-4} u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^N$$

の優解となる．そして, 十分遠方では, 方程式

$$-\Delta u + (1-\epsilon)\xi_\kappa^{-4} u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^N$$

の劣解となることが示せる．このことから, U_κ の下からの評価が得られ, エネルギー評価で $C_1 = C_3$, $C_2 = C_4$ が具体的に求まる．この部分の議論の詳細は, 現在準備中である．

参考文献

[AW12] S. Adachi and T. Watanabe, *Uniqueness of the ground state solutions of quasilinear Schrödinger equations*, Nonlinear Anal. **75** (2012), no. 2, 819–833.

[AW16] ———, *Asymptotic uniqueness of ground states for a class of quasilinear Schrödinger equations with H^1-supercritical exponent*, J. Differential Equations **260** (2016), no. 3, 3086–3118, DOI 10.1016/j.jde.2015.10.029. MR3427691

[ASW14a] S. Adachi, M. Shibata, and T. Watanabe, *Asymptotic behavior of positive solutions for a class of quasilinear elliptic equations with general nonlinearities*, Commun. Pure Appl. Anal. **13** (2014), no. 1, 97–118.

[ASW14b] ———, *Asymptotic behavior of positive solutions for a class of quasilinear elliptic equations in R^2*, Funkcial. Ekvac. **57** (2014), no. 2, 297–317.

[ASW14c] ———, *Blow-up phenomena and asymptotic profiles of ground states of quasilinear elliptic equations with H^1-supercritical nonlinearities*, J. Differential Equations **256** (2014), no. 4, 1492–1514.

[ASW17] ———, *Global uniqueness results for ground states for a class of quasilinear elliptic equations*, Kodai Math. J. **40** (2017), no. 1, 117–142.

[ASW18] ———, *A note on the uniqueness and the non-degeneracy of positive radial solutions for semilinear elliptic problems and its application*, Acta Math. Sci. Ser. B (Engl. Ed.) **38** (2018), no. 4, 1121–1142.

[BEPZ01] L. Brizhik, A. Eremko, B. Piette, and W. J. Zakrzewski, *Electron self-trapping in a discrete two-dimensional lattice*, Physica D **159** (2001), 71–90.

[BGK83] H. Berestycki, T. Gallouët, and O. Kavian, *Équations de champs scalaires euclidiens non linéaires dans le plan*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **297** (1983), no. 5, 307–310 (French, with English summary).

[BL83] H. Berestycki and P.-L. Lions, *Nonlinear scalar field equations. I. Existence of a ground state*, Arch. Rational Mech. Anal. **82** (1983), no. 4, 313–345.

[Caz03] T. Cazenave, *Semilinear Schrödinger equations*, Courant Lecture Notes in Mathematics, vol. 10, New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. MR2002047

[CJ04] M. Colin and L. Jeanjean, *Solutions for a quasilinear Schrödinger equation: a dual approach*, Nonlinear Anal. **56** (2004), no. 2, 213–226.

[CJS10] M. Colin, L. Jeanjean, and M. Squassina, *Stability and instability results for standing waves of quasi-linear Schrödinger equations*, Nonlinearity **23** (2010), no. 6, 1353–1385.

[GS12] F. Gladiali and M. Squassina, *Uniqueness of ground states for a class of quasi-linear elliptic equations*, Adv. Nonlinear Anal. **1** (2012), no. 2, 159–179, DOI 10.1515/ana-2011-0001. MR3034299

[Kur81] S. Kurihara, *Large-Amplitude Quasi-Solitons in Superfluid Films*, J. Phys. Soc. Japan **50** (1981), no. 10, 3262-3267.

[LW03] J. Liu and Z.-Q. Wang, *Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations. I*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), no. 2, 441–448.

[LWW03] J.-q. Liu, Y.-q. Wang, and Z.-Q. Wang, *Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations. II*, J. Differential Equations **187** (2003), no. 2, 473–493.

[LWW04] ———, *Solutions for quasilinear Schrödinger equations via the Nehari method*, Comm. Partial Differential Equations **29** (2004), no. 5-6, 879–901.

[McL93] K. McLeod, *Uniqueness of positive radial solutions of $\Delta u + f(u) = 0$ in $\mathbf{R}^n$. II*, Trans. Amer. Math. Soc. **339** (1993), no. 2, 495–505.

[PSW02] M. Poppenberg, K. Schmitt, and Z.-Q. Wang, *On the existence of soliton solutions to quasilinear Schrödinger equations*, Calc. Var. Partial Differential Equations **14** (2002), no. 3, 329–344.

[Sel11] A. Selvitella, *Uniqueness and nondegeneracy of the ground state for a quasilinear Schrödinger equation with a small parameter*, Nonlinear Anal. **74** (2011), no. 5, 1731–1737.

[ST00] J. Serrin and M. Tang, *Uniqueness of ground states for quasilinear elliptic equations*, Indiana Univ. Math. J. **49** (2000), no. 3, 897–923.